Es. 1: Nella soluzione dell'esercizio 8 del foglio 1 abb. visto il fatto seguente: se $X \in M_2(\mathbb{C})$ è tale che

$$e^X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

allora X non è diagonalizzabile, ed è della forma

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

dove $\lambda = m\pi i$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$ dispari. In particolare $\lambda \neq 0$.

Ora, visto che X non è diagonalizzabile, non può avere due autovalori distinti, perciò X è della forma

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad e \qquad tr(X) = 2\lambda \neq 0$$

$\square$

Es. 2: Supponiamo $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ abeliano, e sia $V = Span(G) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale generato da G.

Le matrici in V commutano tutte, infatti date due comb. lin.

$$X = a_1 g_1 + \dots + a_r g_r \qquad Y = b_1 h_1 + \dots + b_s h_s$$

con $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ e $g_i, h_j \in G$ $\forall i, j$, abb.

$$XY = (a_1 g_1 + \dots + a_r g_r)\cdot(b_1 h_1 + \dots + b_s h_s) = \sum_{i,j} a_i g_i\, b_j h_j = \sum_{i,j} a_i b_j\, g_i h_j$$

$$YX = (\dots)\cdot(\dots) = \sum_{i,j} b_j h_j\, a_i g_i = \sum_{i,j} a_i b_j\, h_j g_i$$

e abb. $XY = YX$ perché $g_i h_j = h_j g_i$.

Osserviamo ora che $Lie(G) \subseteq V$, infatti data $X \in Lie(G)$ scegliamo $t \in \mathbb{R}$ piccolo ($\neq 0$) tale che log sia definita in e^{tX} e valga $\log(e^{tX}) = tX$

Sappiamo $e^{tX} \in G$, chiamiamo $g = e^{tX}$, e allora

$$tX = \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \underbrace{g^i}_{\in G} \right)$$

Tutte le somme parziali sono in V, quindi anche il limite tX è in V (i sottosp. vett. di $\mathbb{R}^{n^2}$ sono sottoinsiemi <u>chiusi</u>!).

Segue: $X \in V$.

Allora tutte le matrici in $Lie(G)$ commutano fra loro.

<u>Esercizio 3</u>: $\mathfrak{p}$ è un sottosp. vett. chiuso per prodotto, quindi è una s.alg. associativa e di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$. Per $\mathfrak{r}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & BF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & DB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathfrak{r}$ è un ideale di $\mathfrak{gl}(n)$.

Es. 4: 1) $\mathfrak{u}(n)$ è chiuso per somma e prod. per $s \in \mathbb{R}$

$$(sA) + {}^t\overline{(sA)} = sA + s\,{}^t\overline{A} = s(A + {}^t\overline{A}) = 0$$

non funziona se $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$!

$\mathfrak{u}(n)$ è chiuso per bracket:

$${}^t(\overline{A}\,\overline{B}) = {}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A}$$

$$[A,B] + {}^t\overline{[A,B]} = AB - BA + {}^t\overline{(AB - BA)} = AB - BA + {}^t\overline{(AB)} - {}^t\overline{(BA)} =$$

$$= AB - BA + {}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A} - {}^t\overline{A}\,{}^t\overline{B} = \quad \longleftarrow \left({}^t\overline{A} = -A,\ {}^t\overline{B} = -B\right)$$

$$= \cancel{AB} - \cancel{BA} + \cancel{(-B)(-A)} - \cancel{(-A)(-B)} = 0$$

2) Sia $A \in \mathfrak{u}(n)$, allora

$$(iA) + {}^t\overline{(iA)} = iA + \overline{i}\,{}^t\overline{A} = iA - i\,{}^t\overline{A} = i\underbrace{(A - {}^t\overline{A})}_{\neq 0 \text{ se } A \neq 0!}$$

Es. 5: $G = \{I_2\}$, $\mathrm{Lie}(G) = \{0\}$

ma $$e^{\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) & -\sin(2\pi) \\ \sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{pmatrix} = I_2$$

Es. 6: 1) $\mathrm{Lie}(SO(n,\mathbb{R})) = \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ è sottoalg. di Lie (verifica simile a es. 4). $\dim(\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})) = \dim(\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A \text{ antisimm.}\}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

2) per $n=2$ vale $\dim(\mathfrak{so}(2,\mathbb{R})) = \dfrac{\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}} = 1$

Segue $\mathfrak{so}(2,\mathbb{R})$ abeliana

Es. 7: $SO(2,\mathbb{R}) \cong S^1$ è compatto

$GL(1,\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}_{\neq 0}, \times)$ non è compatto

però $Lie(SO(2,\mathbb{R})) = \mathfrak{so}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}) = Lie(GL(1,\mathbb{R}))$.

Es. 8: Il metodo di Gram-Schmidt si può applicare anche su $\mathbb{C}$ con il prod. Hermitiano std, quindi poss. fare

$$GL(n,\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} U(n)$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \cdots & \boxed{v_n} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \cdots & \boxed{u_n} \end{pmatrix} = \rho(A) \text{ dove } \begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = a_{21} v_1 + v_2 \\ \vdots \\ w_n = \ldots \end{cases} \quad (G.-S.)$$

e $u_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$.

← norma Hermitiana standard

Oss.: $$\rho(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_{21} & a_{31} & \cdots \\ 0 & 1 & a_{32} & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\|w_1\|} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{\|w_2\|} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Per $SL(n,\mathbb{C}) \to SU(n,\mathbb{C})$ vogliamo usare $\rho|_{SL(n,\mathbb{C})}$, ma non è chiaro se $\det(\rho(A)) = 1$ $\forall A \in SL(n,\mathbb{C})$.

Usiamo allora $q: SL(n,\mathbb{C}) \to SU(n,\mathbb{C})$

$$q(A) = A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_{21} & a_{31} & \cdots \\ 0 & 1 & a_{32} & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\|w_1\|} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\|w_{n-1}\|} & \\ & & & \|w_1\| \cdots \|w_{n-1}\| \end{pmatrix}}_{D}$$

cioè le colonne di $q(A)$ sono $\underbrace{u_1, \dots, u_{n-1}}_{\text{come } p(A)}$, $\|w_1\| \cdots \|w_{n-1}\| \, w_n$.

Segue: $\langle$ i-esima col. di $q(A)$, j-esima col. di $q(A) \rangle = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{se } i,j < n \\ 0 & \text{se } i = n,\ j < n \\ 0 & \text{se } i < n,\ j = n \\ ? & \text{se } i = j = n \end{cases}$

Sappiamo però che $\det(q(A)) = 1$, perché $q(A)$ è prod. di 3 matr. di SL.

Dim. che $q(A) \in U(n)$:

$$^t q(A) \cdot \overline{q(A)} = {}^t D \cdot {}^t B \cdot \overline{B} \cdot \overline{D}$$

Ora: le entrate di $^t B \cdot \overline{B}$ sono i prodotti Hermitiani standard fra le colonne di B. Visto che queste formano una base „ortogonale" $(w_1, \dots, w_n)$ allora $^t B \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & & & \\ & \|w_2\|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|w_n\|^2 \end{pmatrix}$. Segue:

$$^t q(A) \cdot \overline{q(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|w_1\|} & & & \\ & \frac{1}{\|w_2\|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\|w_{n-1}\|} \\ & & & & \|w_1\| \cdots \|w_{n-1}\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|w_n\|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \|w_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|w_n\|^2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $\|w_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|w_n\|^2$

Infine: $\det\left({}^t q(A) \cdot \overline{q(A)}\right) = \det\left({}^t q(A)\right) \cdot \det\left(\overline{q(A)}\right) = \det(q(A))^2$

cioè $\|w_1\|^2 \cdot \ldots \cdot \|w_n\|^2 = 1$. Ma allora

$${}^t q(A) \cdot \overline{q(A)} = I_n \qquad \text{cioè} \qquad q(A) \in U(n).$$

Visto che $\det(q(A)) = 1$, abb. $q(A) \in SU(n)$. Abb. trovato allora

$$q : SL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow SU(n) \qquad \text{continua e suriettiva}$$

(se $A \in SU(n)$ allora le sue colonne sono già ortonormali e $q(A) = A$).